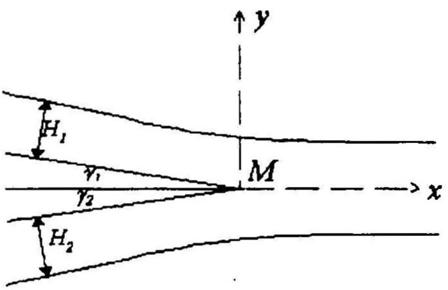
СОУДАРЕНИЕ ЖИДКИХ СТРУЙ С УЧЕТОМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Н.В.Вагизова, А.В.Кузнецов

НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева
Казанского государственного университета
420008, Казань, ул. Университетская, 17
Natasha.Vagizova@ksu.ru, Arkadii.Kuznetsov@ksu.ru



Две плоские струи невязкой жидкости, соударяются друг с другом так, как это показано на рисунке. Задача рассматривается в линейном приближении. Скорости соударяющихся струй равны: $V_1 = V_2 = U$. Если углы γ_1, γ_2 малы, то из условия равенства проекций количеств движения на ось y следует $\rho_1 H_1 \gamma_1 = \rho_2 H_2 \gamma_2$, где ρ_1, ρ_2 – плотности, $H_1 = \pi h_1$, $H_2 = \pi h_2$ – ширины струй.

На свободных границах давление P=const. На линии контакта выполняются динамическое (непрерывность давлений) и кинематическое (непрерывность нормальных составляющих скоростей) условия. В системе координат, связанной с точкой контакта M, стационарное течение описывается комплексными потенциалами

$$W_j(z) = Uz + w_j(z),\ w_j(z) = \varphi_j(x,y) + i\psi_j(x.y),\ j = 1, 2.$$

Для решения задачи достаточно найти функции $w_j(z)$ или их производные.

В линейном приближении граничные условия сносятся на границы линеаризованной области $D = D_1 \bigcup D_2$, которая в плоскости $\tilde{z} = z/l$ представляет собой полосу шириной $(H_1 + H_2)/l$, разрезанную вдоль отрицательной части оси $\tilde{x}$. В дальнейшем знак ~ опустим. Влиянием сил тяжести и поверхностного натяжения на свободных границах будем пренебрегать и учитывать их лишь на границе контакта. В результате получим следующие граничные условия

$$\varphi_{j_x}(x, y_j) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \; y_j = H_j/l,$$

$$\varphi_{j_x}(x, 0) = 0, \quad x < 0,$$

$$\psi_{2_y}(x,0) - \gamma\psi_{1_y}(x,0) - \nu\psi_1(x,0) = -\frac{1}{We}\psi_{1_{xx}}(x,0), \quad x > 0, \qquad (1)$$

$$\psi_{2x}(x, 0) = \psi_{1x}(x, 0), \quad x > 0,$$

где

$$\gamma = \rho_1/\rho_2, \; \nu = (1-\gamma)/(lFr), \quad Fr = U^2/(g\,l), \; We = \rho_2 U^2 l/T,$$

T – коэффициент поверхностного натяжения. Сюда нужно еще присоединить условие на бесконечности

$$\psi_{1_x}(x \to -\infty) = lU\gamma_1, \quad \psi_{2_x}(x \to -\infty) = -lU\gamma_2.$$

Уравнение (1) записано в общем виде и имеет место при совместном учете влияния силы тяжести и поверхностного натяжения, но вследствие линейности задачи справедлив принцип наложения течений, поэтому задачи с учетом весомости и поверхностного натяжения будем рассматривать отдельно. В первом случае, при формулировке динамического условия, следует положить $T = 0$, а во втором $\nu = 0$.

1. Соударение тяжелых жидкостей. Для решения задачи отобразим полосы $D_1: \; 0 < y < H_1/l, \; -\infty < x < \infty$, и $D_2: \; -H_2/l < y < 0, \; -\infty < x < \infty$, на полосы шириной $\pm\pi$. Эти отображения имеют вид $z_j = k_j z, \; k_j = \pi/h_j$.

Пусть в плоскости z известна зависимость $r(x) = \psi_{1_x}(x) = \psi_{2_x}(x), \; x > 0$, $y = 0$. Тогда в плоскостях z_j будут известны функции $r_j(x_j) = r(k_j x)$, соответственно, и функции w_{j_z} можно восстановить как решения смешанных краевых задач. Решения будем искать в классе функций, имеющих в точке $z = 0$ порядок $O(z^{-1/2})$. Такой характер особенности диктуется учетом в линейной постановке влияния кумулятивной струи, образующейся при соударении струй. Таким образом, можно записать

$$w_{jz}(z_j) = (-1)^{j+1}\frac{g(z_j)}{\pi}\int_0^\infty \frac{r_j(\xi_j)d\xi_j}{g_j(\xi_j, z_j)} + \frac{\kappa_j}{g(z_j)},$$

где $g(z_j) = (e^{z_j} - 1)^{1/2}, \quad g_j(\xi_j, z_j) = e^{-\xi_j}(e^{\xi_j} - e^{z_j})(e^{\xi_j} - 1)^{1/2}, \quad \kappa_j = -U\gamma_j$ для функции $g(z)$, однозначной в плоскости, разрезанной по оси $x < 0$.

Отсюда при $z_j = x_j > 0$ получим

$$\varphi_{j_x}(x_j) = (-1)^{j+1} A_j r_j(x_j) + \frac{\kappa_j}{g(x_j)}, \qquad (2)$$

где сингулярные операторы

$$A_j r_j = \frac{g(x_j)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{r_j(\xi_j) d\xi_j}{g_1(\xi_j, z_j)}, \quad j = 1, 2. \qquad (3)$$

Имеет место формула обращения: если $A_j r_j(x_j) = f(x_j)$, то

$$r_j(x_j) = B_j f(x_j) + b_j, \qquad (4)$$

где $B_j f(x_j) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{\xi_j} f(\xi_j) d\xi_j}{e^{x_j} - e^{\xi_j}}$, а b_j – произвольные постоянные.

Используя значения $\varphi_{j_{x_j}}(x_j)$ из (2), представим динамическое условие (1) в следующем виде

$$-A_2 r_1(x_1) - \gamma A_1 r_1(x_1) - \upsilon \psi_1(x_1) = \frac{\gamma \kappa_1}{g(x_1)} - \frac{\kappa_2}{g(kx_1)}. \qquad (5)$$

В (3) для $j = 2$ перейдем от интегрирования по ξ_2 к интегрированию по ξ_1, т. е. введем замену $\xi_2 = k\xi_1$, $k = h_1/h_2$, $x_2 = kx_1$. С учетом $r_2(k\xi_1) = r_1(\xi_1)$ получим

$$A_2 r_2(x_2) = \frac{g(kx_1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{r_1(\xi_1) d(k\xi_1)}{g_1(k\xi_1, kx_1)} = A_2 r_1(x_1).$$

Здесь интегральный оператор от $r_1(\xi_1)$ обозначен как $A_2 r_1(x_1)$, чтобы не вводить новых обозначений. Учитывая это, применим к выражению (5) оператор B_1. На основании формул обращения (4) и равенства $B_1(g^{-1}(kx_1)) = 0$ получим

$$B_1 A_2 r_1(x_1) + \gamma r_1(x_1) + \nu B_1 \psi_1(x_1) = \kappa_2 B_1(g^{-1}(kx_1)) + b_1. \qquad (6)$$

В первом слагаемом последнего соотношения переставим порядок интегрирования, используя обобщенную формулу Пуанкаре-Бертрана [1]. Введя обозначение

$$S(x_1, \sigma) = -\frac{1}{\pi^2} \frac{ke^{k\sigma}}{\sqrt{k\sigma - 1}} \int_0^{\infty} \frac{e^{\tau} \sqrt{e^{k\tau} - 1}\, d\tau}{(e^{\tau} - e^{x_1})(e^{k\sigma} - e^{k\tau})},$$

запишем

$$B_1 A_2 r_1(x_1) = r_1(x_1) + \int_0^\infty S(x_1,\sigma) r_1(\sigma) d\sigma. \qquad (7)$$

Подставив (7) в (6), получим уравнение

$$r_1(x_1) = \frac{\delta}{\pi}\int_0^\infty \frac{\psi_1(\xi_1)d\xi_1}{e^{\xi_1 - x_1} - 1} - \frac{1}{1+\gamma}\int_0^\infty S(x_1,\xi_1) r_1(\xi_1) d\xi_1 + f(x_1) + a, \qquad (8)$$

где $\delta = \nu/(1+\gamma)$, $f(x_1) = \kappa_2 B_1(g^{-1}(kx_1))$, $a = \mathrm{const}$. Для решения уравнения (8) применим метод Винера-Хопфа [2, 3]. Пусть при $x_1 < 0$

$$\frac{\delta}{\pi}\int_0^\infty \frac{\psi_1(\xi_1)d\xi_1}{e^{\xi_1 - x_1} - 1} = r^-(x_1).$$

Тогда из (8) получим уравнение

$$\frac{\delta}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\psi_1(\xi_1)d\xi_1}{e^{\xi_1 - x_1} - 1} = \begin{cases} r^-(x_1), & x_1 < 0, \\ r_1(x_1) + \dfrac{1}{1+\gamma}\displaystyle\int_0^\infty S(x_1,\xi_1) r_1(\xi_1) d\xi_1 - \rho(x_1) - a, & x_1 > 0. \end{cases}$$

Применим к этому уравнению преобразование Фурье в комплексной плоскости. Получим

$$K(\alpha)R^+(\alpha) + R^-(\alpha) + \int_{-\infty}^\infty M(\alpha,\xi_1) R^+(\xi_1) d\xi_1 + G(\alpha) - \frac{a}{i\alpha} = 0, \qquad (9)$$

где

$$K(\alpha) = 1 - \frac{\delta}{\alpha}\operatorname{cth}\pi\alpha, \quad 0 < \mathrm{Jm}\,\alpha < 1,$$

$$R^+(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x_1} r_1(x_1) dx_1, \quad R^-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x_1} r^-(x_1) dx_1, \qquad (10)$$

$$M(\alpha,\xi_1) = \frac{1}{1+\gamma}\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \dot{S}(\alpha,\xi_1) e^{-i\beta\xi_1} d\xi_1,$$

$$\dot{S}(\alpha,\xi_1) = \int_0^\infty e^{i\alpha x_1} S(x_1,\xi_1) dx_1, \quad G(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x_1} f(x_1) dx_1.$$

Для решения функционального уравнения (9) необходимо факторизовать функцию $K(\alpha)$, т. е. представить ее в виде произведения $K(\alpha) = K^+(\alpha)K^-(\alpha)$, где $K^+(\alpha)$ – функция, регулярная и не обращающаяся в нуль в верхней полуплоскости, а $K^-(\alpha)$ – функция, обладающая аналогичными свойствами в нижней полуплоскости. Представим выражение для функции $K(\alpha)$ в виде

$$K(\alpha) = \alpha^{-2} K_1(\alpha) K_2(\alpha),$$

где

$$K_1(\alpha) = \alpha / \operatorname{sh} \pi\alpha, \quad K_2(\alpha) = \alpha \operatorname{sh} \pi\alpha - \delta \operatorname{ch} \pi\alpha.$$

Функцию $K_1(\alpha)$ легко факторизовать

$$K_1^{\pm}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1 \mp i\alpha),$$

а $K_2^{\pm}(\alpha)$ представляют собой целые четные функции, для которых справедливо представление в виде бесконечных произведений. Тогда для $K^{\pm}(\alpha)$ получим

$$K^{\pm}(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{\delta}{\pi}} \Gamma(1 \mp i\alpha) \prod_{n=1}^{\infty} (1 \mp \frac{i\alpha}{\alpha_n}) e^{\pm i\alpha/n} e^{\mp\Phi(\alpha)} \begin{pmatrix} 1 - \alpha^2 \alpha_0^{-2} \\ \alpha^{-2} \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

где $\pm\alpha_0$ являются действительными, а $\alpha_n = i(n \mp \varepsilon_n)$ $(n = 1, 2, \ldots,$ $0 < \varepsilon_n < 0{,}5,$ $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty)$ – мнимыми корнями уравнения $\alpha \operatorname{sh} \pi\alpha - \delta \operatorname{ch} \pi\alpha = 0$.

В уравнении (11) $\Phi(\alpha)$ – целая функция. Она обеспечивает необходимое поведение функций $K^{\pm}(\alpha)$ при $\alpha \to \infty$. В случае, когда $\Phi(\alpha) = iC\alpha$, где $C = 0{,}5772\ldots$ – постоянная Эйлера, $K^{+}(\alpha) \sim O(|\alpha|^2)$, $K^{-}(\alpha) \sim O(|\alpha|^{-2})$.

Введем далее функции

$$G_1(\alpha) = \frac{G(\alpha) - a/i\alpha}{K^{-}(\alpha)}, \quad N(\alpha) = \frac{1}{K^{-}(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} M(\alpha, \xi_1) R^{+}(\xi_1) d\xi_1$$

и представим их в виде сумм двух функций, регулярных, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях, используя формулу

$$F^{\pm}(\alpha) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)}{t - \alpha} dt. \qquad (12)$$

В результате указанных преобразований уравнение (9) приводится к виду

$$K^{+}(\alpha) R^{+}(\alpha) + N^{+}(\alpha) + G_1^{+}(\alpha) = -\frac{R^{-}(\alpha)}{K^{-}(\alpha)} - N^{-}(\alpha) - G_1^{-}(\alpha) = P(\alpha), \quad (13)$$

где $P(\alpha)$ – полином, имеющий порядок, определяемый порядком левой части уравнения на бесконечности. Проведя оценки, можно показать, что

$P(\alpha)=0$. Таким образом, для $R^+(\alpha)$ получим уравнение

$$K^+(\alpha)R^+(\alpha)+N^+(\alpha)=-G_1{}^+(\alpha), \quad \alpha=\sigma+i\tau,$$

в котором

$$N^+(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha,\xi_1)R^+(\xi_1)d\xi_1, \tag{14}$$

$$Q(\alpha,\xi_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M(t,\xi_1)}{K^-(t)(t-\alpha)}dt.$$

Совершив в (13) переход $\alpha\to\sigma+i0$, получим уравнение

$$K^+(\sigma)R^+(\sigma)+\int_{-\infty}^{\infty} m_1(\sigma,\xi)R^+(\xi)d\xi=C-G_1{}^+(\sigma), \tag{15}$$

где $m(\sigma,\xi)$ – предельные значения интеграла (14), вычисленные по формуле Сохоцкого.

Так как $K^+(\sigma)=(\sigma^2-\alpha_0^2)\tilde{K}^+(\sigma)$, где $\tilde{K}^+(\sigma)\neq 0$ для $\forall\sigma\in(-\infty,\infty)$, то (15) представляет собой интегральное уравнение третьего рода. Его можно преобразовать в уравнение второго рода для новой функции, введя ее следующим образом. Продолжим уравнение в комплексную область переменного α и положим

$$R^+(\alpha)=\frac{a\alpha+b}{\alpha^2-\alpha_0^2}+\tilde{R}(\alpha). \tag{16}$$

Определим коэффициенты a и b так, чтобы правая часть полученного уравнения обращалась в нуль при $\alpha=\pm\alpha_0$. Эти коэффициенты будут зависеть от двух произвольных параметров, обусловленных исключением из интервала интегрирования окрестностей точек $\pm\alpha_0$ для устранения особенностей преобразованного ядра уравнения. Полученное уравнение затем очевидным путем преобразуется в интегральное уравнение второго рода.

Асимптотическое поведение функции

$$\psi_{1x}(x_1)=r_1(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x_1}R^+(\alpha)d\alpha \tag{17}$$

при $x_1\to\infty$ определяется первым слагаемым в (16). Заменив интеграл в (17) контурным, получим, что $r_{1ac}(x_1)$ определяется суммой вычетов подынтегральной функции в точках $\pm\alpha_0$. Так как граница раздела находится из уравнения $\eta = -\psi_1(x)/U$, то $\eta \sim A\cos\beta x + B\sin\beta x$, $\beta = \alpha_0 l/h_1$, A, B – произвольные постоянные.

Таким образом, при соударении двух тяжелых жидкостей на границе раздела образуются волны. При $l = h_j$ длина волны $\lambda = 2\pi/\alpha_0$ и зависит от $\delta = (1-\gamma)/[(1+\gamma)Fr]$. С увеличением числа Фруда длина волны увеличивается.

В случае $H_1 = H_2$ в уравнении (13) $N(\alpha) = 0$, $G_1^+(\alpha) = a/i\alpha$ и, следовательно,

$$R^+(\alpha) = -G^+{}_1(\alpha)/K^+(\alpha).$$

Функция $r_1(x_1)$ находится путем перехода в формуле обращения к контурному интегрированию и применения теории вычетов. Для $x_1 > 0$ получим

$$r_1(x_1) = \sqrt{\frac{\pi}{\delta}}a\left[1 - \mathrm{Re}\frac{e^{-i\alpha_0(C+x_1)}}{\Gamma(1-i\alpha_0)\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{i\alpha_0}{\alpha_n})e^{\frac{i\alpha_0}{n}}} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_m(C+m^{-1}+x_1)}}{\Gamma(1-\alpha_m)\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{\alpha_m}{\alpha_n})e^{\frac{\alpha_m}{n}}(1+(\frac{\alpha_m}{\alpha_0})^2)}\right]$$

В случае соударения невесомых жидкостей при $H_1 \neq H_2$ функция $r_1(x_1)$ находится из интегрального уравнения Фредгольма, которое следует из уравнения (8) при $\delta = 0$.

2. Соударение капиллярных струй. При рассмотрении задачи с учетом поверхностного натяжения ограничимся, для простоты, случаем $H_1 = H_2$. В этом случае уравнение (5) будет иметь вид

$$-(1+\gamma)A\psi_1(x) + \nu\psi_{1_{xx}}(x) = (\gamma\kappa_1 - \kappa_2)/g(x), \qquad (18)$$

где, для удобства записи, положим $\nu = 1/We$.

Применив к уравнению (18) оператор B, получим

$$\psi_{1_x}(x) = -\frac{\delta}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\psi_{1\xi\xi}(\xi)d\xi}{e^{\xi-x}-1} + a, \qquad (19)$$

где $\delta = \nu/(1+\gamma)$, a=const.

Применим метод Винера-Хопфа. Пусть при $x < 0$

$$\frac{\delta}{\pi}\int_0^\infty \frac{\psi_{1_{\xi\xi}}(\xi)d\xi}{e^{\xi-x}-1} = r^-(x).$$

Тогда из (19) получим уравнение

$$\frac{\delta}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\psi_{1\xi\xi}(\xi)d\xi}{e^{\xi-x}-1} = \begin{cases} -r^-(x), & x<0, \\ -\psi_{1x}(x)+a, & x>0. \end{cases}$$

Применяя преобразование Фурье, получим

$$K(\alpha)R^+(\alpha)+R^-(\alpha) = -\frac{a}{i\alpha}, \tag{20}$$

где $R^\pm(\alpha)$ определяются формулами (10), а $K(\alpha) = 1-\delta\,\alpha\,\mathrm{cth}\,\pi\alpha$. Факторизуя функцию K и введя обозначение

$$G(\alpha) = -\frac{a}{i\alpha\,K^-(\alpha)},$$

представим $G(\alpha)$ по формулам (12). Тогда уравнение (20) можно записать в виде

$$K^+(\alpha)R^+(\alpha)-G^+(\alpha) = -\frac{R^-(\alpha)}{K^-(\alpha)}+G^-(\alpha) = P(\alpha). \tag{21}$$

Здесь

$$K^\pm(\alpha) = \sqrt{1-\frac{\delta}{\pi}}\,\Gamma(1\mp i\alpha)\prod_{n=1}^\infty(1\mp\frac{i\alpha}{\alpha_n})\,e^{\pm i\alpha/n}\quad e^{\mp\Phi(\alpha)}\begin{pmatrix}1-\alpha^2\alpha_0^{-2}\\ 1\end{pmatrix},$$

где $\pm\alpha_0$ являются действительными, а $\alpha_n = i(n\pm\varepsilon_n)$ ($n = 1,2,\ldots,\ 0<\varepsilon_n<\pi/2$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n\to\infty$) – мнимыми корнями уравнения

$$\frac{\mathrm{sh}\,\pi\alpha}{\pi\alpha}-\frac{\delta}{\pi}\,\mathrm{ch}\,\pi\alpha = 0,$$

причем действительные корни $\pm\alpha_0$ существуют лишь в случае когда $\delta/\pi<1$. При $\Phi(\alpha) = iC\alpha$ $K^+(\alpha)\sim O(|\alpha|^{-3/2})$, $K^-(\alpha)\sim O(|\alpha|^{-1/2})$.

Можно показать, что $P(\alpha) = 0$. Тогда из уравнения (21) получим

$$R^+(\alpha) = G^+(\alpha)/K^+(\alpha). \tag{22}$$

Так как

$$G^{+}(\alpha)=-\frac{a}{i\alpha},\ \ \psi_{1_x}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-i\alpha x}R^{+}(\alpha)d\alpha,$$

получим, применяя теорию вычетов,

$$\psi_{1_x}(x)=\frac{a}{\sqrt{1-\delta/\pi}}\left[1-\mathrm{Re}\frac{e^{-i\alpha_0(C+x_1)}}{\Gamma(1-i\alpha_0)\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{i\alpha_0}{\alpha_n})e^{\frac{i\alpha_0}{n}}}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_m(C+m^{-1}+x_1)}}{\Gamma(1-\alpha_m)\prod\limits_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}(1-\frac{\alpha_m}{\alpha_n})e^{\frac{\alpha_m}{n}}(1+(\frac{\alpha_m}{\alpha_0})^2)}\right]$$

Отсюда можно заключить, что при соударении капиллярных струй на границе раздела при $x\to\infty$ образуются волны длины $\lambda=2\pi/\alpha_0$, но лишь тогда, когда $\delta/\pi<1$. При этом длина волны уменьшается, когда $\alpha_0\to\infty$, что имеет место при $\delta=T/[\rho_2U^2l(1+\gamma)]\to 0$, то есть когда коэффициент натяжения $T\to 0$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке научной программы “Фундаментальные исследования высшей школы в области естественных и гуманитарных наук. Университеты России”.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.

2. Нобл Б. *Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных.* – М.: Иностранная литература, 1962. – 280 с.

3. Котляр Л.М. *Истечение тяжелой жидкости из под щита* // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. – Вып. 7. – С. 160–167.

4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Проблемы гидродинамики и их математические модели.* – М.: Наука, 1973. – 416 с.